09/11/2015

$\sqrt{2} = 1.41421356237$

$x_0 = 2$

$x_1 = 1.5$

$x_2 = 1.4166667$

$x_3 = 1.41421568$

$x_4 = 1.414212356$ (11 δεκαδικά ψηφία)

Από επανάληψη σε επανάληψη διπλασιάζεται ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων γιατί έχουμε τετραγωνική σύγκλιση.

"3ο § Γραμμικά Συστήματα"

$Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ (Για να λύνεται το σύστημα) $\det(A) \neq 0$

α) Μέθοδος Cramer (Κανόνας Cramer): Μη αποτελεσματική: κόστος → εύρεση n+1 οριζουσών. Η κάθε ορίζουσα απαιτεί άθροισμα με n! όρους γινομένων n αριθμών. Συνολικά $(n-1)n!$ πράξεις

∘ Για n = 100 απαιτούνται περίπου 10^{140} αιώνες

Το n! μεγαλώνει εκθετικά

β) Εύρεση του A^{-1} και υπολογισμός του $x = A^{-1}b$. Η εύρεση αντιστρόφου αποτελεί λύση n γραμμικών συστημάτων. $AX = I \iff A(X^{(1)} X^{(2)} \ldots X^{(n)}) = (e^{(1)} e^{(2)} \ldots e^{(n)})$

Λύση n γραμμικών συστημάτων $AX^{(i)} = e^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

γ) Μέθοδος Απαλοιφής Gauss (Συμφέρει!) Με μεθοδικό τρόπο απαλείφουμε τα στοιχεία της 1ης στήλης κάτω απ' τη διαγώνιο, στη συνέχεια τις 2ης, 3ης κοκ και καταλήγουμε σε ισοδύναμο σύστημα $Ux = y$.

$$u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \ldots + u_{1n}x_n = y_1$$
$$u_{22}x_2 + \ldots + u_{2n}x_n = y_2$$

Η λύση του δίνεται απ' τον αλγόριθμο οπισθοδρόμησης η προς τα πίσω αντικαταστάσεις

$$x_n = y_n / u_{nn} \quad \text{Για } k = n-1, n-2, \dots, 1$$
$$x_k = \left(y_k - \sum_{i=k+1}^{n} u_{ki} x_i\right) / u_{kk}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Να λυθεί το γραμμικό σύστημα:

$r_2 \to r_2 - \frac{2}{3} r_1$, $m_{21} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$r_3 \to r_3 - \frac{1}{3} r_2$, $m_{31} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

$m_{32} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = (0 - 6\cdot 2 + 3(-1))/9 = -9/9 = -1 \\ x_2 = \frac{(6 - 2(-1))}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{8}{4} \Rightarrow x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

	1η	2η	3η	
	9	6	3	0
$\frac{2}{3}$	6	8	4	6
$\frac{1}{3}$	3	4	3	2
		4	2	6
$\frac{1}{2}$		2	2	2
			1	-1
			-1	

	9	6	3	0
2/3	6	8	4	6
1/3	3	4	3	2
	9	6	3	0
		4	2	6
1/2		2	2	2
	0	6	3	0
		4	2	6
			1	-1

$$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & (a_{1n})^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & (a_{2n})^{(1)} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad b = b^{(1)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix} \longrightarrow A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ & \vdots & & \\ & a_{n2}^{(2)} & & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix},$$

πολ/στές m_{21}, …, m_{n1}

$$b = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{επαγωγικά} \longrightarrow A^{(r)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1r}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2r}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_{rr}^{(r)} & \dots & a_{rn}^{(r)} \\ & & & \vdots & & \\ & & & a_{nr}^{(r)} & & a_{nn}^{(r)} \end{bmatrix}, \quad b^{(r)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_r^{(r)} \\ \vdots \\ b_n^{(r)} \end{bmatrix}$$

$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}$ (Σε σχέση με τον $A^{(1)}$) για $i,j = 2,3,\dots,n$, όπου $m_{ij} = \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$

$a_{i,j}^{(r)} = a_{ij}^{(r-1)} - m_{i,(r-1)} \cdot a_{r-1,j}^{(r-1)} \quad i,j = r, r+1, \dots, n$

$m_{i,r-1} = \dfrac{a_{i,r-1}}{a_{r-1,r-1}^{(r-1)}}$

$A^{(2)} = M_1 A^{(1)} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \dots & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ -m_{n1} & 0 & 0 \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & -m_{n2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \dots M_r = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$

$M_r = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & -m_{r+1,r} & 1 \\ & & -m_{r+2,r} & 0 & \ddots \\ & & \vdots & \vdots \\ & & -m_{nr} & 0 & & 1 \end{bmatrix}$

Επαγωγικά $U = A^{(n)} = M_{n-1} A^{(n-1)} = M_{n-1} M_{n-2} A^{(n-2)} = \dots$

$\dots = M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1 A \Leftrightarrow$

$A = (M_{n-1} M_{n-2} \dots M_2 M_1)^{-1} \cdot U =$

$\underbrace{M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1}}_{L} \cdot U = LU$

LU παρ/ση του A

$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & & & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & m_{32} & \ddots & \\ 0 & m_{n2} & & 1 \end{bmatrix}$

$M_1^{-1} M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & \ddots & 0 & \\ m_{31} & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & & 1 \end{bmatrix}$, επαγωγικά $L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & \ddots & 0 & \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$

$Ax = b \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$